Was Schüler über CAS wissen – was Schüler über CAS wissen sollten

Reinhard Oldenburg
(Goethe-Universität Frankfurt)

oldenbur@math.uni-frankfurt.de

Einleitung

Wenn Mathematik mit Hilfe von Werkzeugen betrieben wird, ist das nicht ohne Rückwirkung auf die Mathematik selbst: Die symbolische Schreibweise erlaubte zunächst nur, Sachverhalte, die bereits in der Antike bekannt waren, prägnanter auszudrücken, führte dann aber rasch dazu, dass neue Einsichten gewonnen und – noch wichtiger – neue mathematische Objekte wie Wurzeln und imaginäre Zahlen anerkannt wurden. In der Geometrie wandelt sich der Konstruktionsbegriff mit den zugelassenen Zeichenwerkzeugen. Der Einfluss verschiedener Werkzeuge ist dabei unterschiedlich. Der übliche Taschenrechner dürfte weniger bewirken als Computeralgebrasysteme. Sie sind die komplexesten der bisher im Mathematikunterricht eingesetzten Softwareprodukte. Sie kompetent nutzen zu können, ist eine Herausforderung für Schüler wie Lehrer, die zu einem langen Instrumentationsprozess [3] führt. In diesem Beitrag soll diskutiert werden, was Schüler über CAS wissen sollten – und was sie nach Beobachtungen tatsächlich wissen.

Modellvorstellungen

Erklärung ist eine wichtige Funktion von Modellen. Geeignete Modellvorstellungen (siehe z. B. [2]) können dem Benutzer das Verhalten des Computers erklären und damit Hilfen zu seiner korrekten Benutzung geben. Solche Modellvorstellungen geben das Gefühl eines Verständnisses und erhöhen damit die emotionale Akzeptanz des Werkzeugs. Selbst wiederum ein Modell für diese Sachverhalte gibt die folgende Modellvorstellung zur numerischen Nullstellensuche, wie sie beispielsweise von grafikfähigen Taschenrechnern angeboten wird: Bei der numerischen Nullstellenberechnung handelt es sich um eine rechnerische Suche, bei der, beginnend mit einem Startwert, ein schrittweises Herantasten erfolgt, bis der Funktionswert sehr klein ist.

Dieses einfache Modell erklärt:

1. Nullstellen werden evtl. nicht exakt gefunden.
2. Es können auch fälschlich Nullstellen gefunden werden, z. B. weil der Funktionswert unter der Toleranzgrenze liegt.
3. Es kann höchstens eine Nullstelle gefunden werden.
4. Zum Finden weiterer Nullstellen muss man von anderer Stelle (dazu ist Wissen über die Funktionstypen wichtig) neu starten.

Nach Beobachtungen im Unterricht zerfallen die Schüler in der Sekundarstufe II in zwei Gruppen: Diejenigen, die diese Modellvorstellungen erworben haben, benutzen die numerische Nullstellensuche kompetent, während die anderen diese als nicht nützlich empfinden und ablehnen. Damit stellt sich in Bezug auf CAS die folgende Aufgabe: Es sollte identifiziert werden, welche Modellvorstellungen zur Arbeit von Computeralgebrasystemen in der Lage sind, die kompetente CAS-Nutzung anzuleiten.

CAS – geeignete Modellvorstellungen

Hier soll, analog zum obigen Modell, ein einfaches Modell zur technischen Basis von CAS vorgestellt werden. Es umfasst folgende Komponenten:

1. Trennung: Rechenzentrale – Darstellung (EVA). Dies erklärt, dass das, was auf dem Bildschirm steht, erst durch die Verarbeitung wirksam wird.
2. CAS haben eine Variablen-Wert-Tabelle; darin darf die Wertespalte leer sein. Vorhandene Werte werden immer eingesetzt, aber es gibt keine automatische Variablenbelegung z. B. bei solve. Dies erklärt, wie man zwischen Zuweisung und Substitution wählt, und dass

   ```
   x:=y; y:=x
   ```

   unzulässig ist.

3. Alle Objekte sind (verallgemeinerte) Terme, aufgebaut aus einem Kopf und einer Anzahl von Operanden (Baumdarstellung). Dies erklärt u. A. die Wirkungslosigkeit (bei einigen CAS) von

```
subs(sqrt(x^2+y^2+z^2),
      x^2+y^2=r^2)
```

4. Operationen werden durch Regelbefolgung durchgeführt, d. h., wenn die Form passt, wird ausgeführt: In Maxima kann man beispielsweise 0 zu einer Zeichenkette addieren.

5. Die Auswertung ist ein Ersetzen von Teiltermen nach Regeln. Diese sind teilweise nur eingeschränkt gültig:

```
sqrt(x^2)
```

wird in der Regel nicht vereinfacht.

6. Sonderfälle werden in der Regel nicht beachtet. Das erklärt z. B., dass

```
subs(int(x^n,x), n=-1)
```

falsch ist.

7. Die Art der Daten legt mögliche Operationen fest (z. B. Menge und Liste nicht verwechseln, Term oder Funktion angeben).

Dieses Modell lässt noch vieles unspezifiziert. Allein zum Teilbereich des Gleichungslösens muss ein detailliertes Modell noch viel mehr umfassen:

1. Lösungen sind Substitutionen, die die Ausgangsgleichung zur Identität machen.

2. Sonderfälle werden i. A. nicht beachtet, z. B. in $a * x = b$.

3. Die Variablennamen sind bedeutungslos, man kann $a * x = b$ nach a auflösen.

4. Für Polynomialgleichungen über Grad 4 gibt es evtl. keine Darstellung mit Wurzeln: Darstellung durch algebraische Zahlen (RootOf-Objekte).

5. Lineare und polynomielle Gleichungssysteme sind immer lösbar.

6. Transzendente Gleichungen können nur in Ausnahmefällen symbolisch gelöst werden.

Dies demonstriert die angesprochene Komplexität und zeigt, dass man nicht davon ausgehen kann, dass durchschnittliche Schüler ein so detailliertes Modell aufbauen werden.

Schülervorstellungen

Besitzen Schüler nach längerer Arbeit mit einem CAS angemessene Vorstellungen, die dem skizzierten Modell nahe kommen? Um diese Frage zumindest in Ansätzen zu beantworten, wurde den 18 SchülerInnen (8 weiblich, 10 männlich) eines Mathematik-Leistungskurses kurz vor dem Abitur ein Fragebogen vorgelegt. Die Schüler benutzen den CAS-Taschenrechner TI92+ seit Beginn der elften Jahrgangsstufe.

In einem ersten Teil wurden affektive Items durch Zustimmung zu vorgelegten Aussagen auf einer Skala von -3 bis $+3$ erhoben (mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ):

Nr.	Item	μ	σ
1	Ich arbeite gerne mit dem TI89 bzw. mit dem TI92.	1,0	0,7
2	Der TI hilft, eigene Ideen bis zu Ende zu verfolgen.	0,76	1,0
3	Ich kenne mich mit dem TI ganz gut aus.	0,66	0,8
4	Ich vertraue den Ergebnissen des Rechners.	0,44	0,98
5	Die Bedeutung der Ausgaben ist immer klar.	0,11	1,1
6	In Situationen ohne den Rechner fühle ich mich unsicher.	-0,67	1,14

Ergebnisse: Items 1 und 3 korrelieren fast signifikant ($p = 0,057$), Items 3 und 6 korrelieren interessanterweise signifikant negativ. Es gibt keine Korrelation zwischen Items 1 und 4: $r = -0,078, p = 0,76$. Varianzaufklärung zeigt, dass die Leistungsvarianz zu 51% von affektiven Variablen erklärt wird; besonders wichtig sind dabei die Items 2 und 5. Dagegen ist Item 4 (Vertrauen) praktisch unwichtig (Schlussfolgerung: Die Schüler und Schülerinnen vertrauen oft zu unrecht!).

Schülerleistungen

In einem Testteil ohne Zugang zum CAS sollten die Schüler einige CAS-Ausgaben interpretieren (in Klammern die Anteile der Nennungen):

Item 1: Gibt der TI bei der Eingabe

```
factor(1+x+x^2+x^3+x^4)
```

die Ausgabe

```
1+x+x^2+x^3+x^4,
```

dann bedeutet dies:

1. Der TI konnte keine Produktdarstellung finden. (50%)

2. Es gibt definitiv keine Produktdarstellung nur mit rationalen Zahlen. (50%)

Item 2: Gibt der TI bei der Eingabe

```
solve(x^2-y^2/2+2*x=5 and
        x^2+2*x-5/3+1/3*y^2-4/3*y=0,
      {x,y})
```

die Ausgabe

```
false,
```

dann bedeutet dies:

1. Der TI konnte keine Lösung finden. (28%)
2. Es gibt definitiv keine reelle Lösung. (28%)
3. Es ist bewiesen, dass es überhaupt keine Lösung gibt. (56%)

Item 3: Gibt der TI bei der Eingabe

```
solve(e^x-x=0,x)
```

die Ausgabe

```
e^x-x=0,
```

dann bedeutet dies:

1. Der TI konnte keine Lösung finden. (66%)
2. Es gibt definitiv keine reelle Lösung. (28%)
3. Es ist bewiesen, dass es überhaupt keine Lösung gibt. (0%)

Item 4: Zeigt die folgende Rechnung einen Fehler des Computeralgebrasystems?

```
int(1/x^2,x) -> F
```

Antwort: F=-1/x

```
(F|x=1) - (F|x=-1)
```

Antwort: -2

```
int(1/x^2,x,-1,1)
```

Antwort: Unendlich

Zu diesem Item haben erfreuliche 61% eine gute und korrekte Lösung angegeben. Das zeigt, dass die Verwendung eines CAS nicht zu Lasten der mathematischen Kritikfähigkeit gehen muss.

Es gab auch Aufgaben, in denen das CAS zugelassen war:

Item 5: Die Eingabe `expand(log(3*a))` liefert eine Summenschreibweise, `expand(log(a*b))` dagegen nicht. Woran liegt das? Kann man den zweiten Term trotzdem mit dem TI in Summenform schreiben lassen? Korrekte Lösung: 0%

Schlussfolgerungen: Schüler können nur bedingt verlässlich einschätzen, ob negative Antworten mathematische oder technische Gründe haben. Immerhin gibt es dazu offensichtlich gewisse Vorstellungen, obwohl diese Fragen im Unterricht nicht thematisiert wurden.

Perspektiven für die Lehre

CAS stellen ein didaktisches Problem dar, denn geeignete Modellvorstellungen sind wesentlich komplexer als beim GTR. Der Informatikunterricht könnte, wo er erteilt wird, hier Wesentliches zuliefern: Es ist möglich, die Grundfunktionen eines Computeralgebrasystems in einem Modell-System zu rekonstruieren. Mit einem noch überschaubaren Code-Umfang von 200 bis 300 Zeilen lassen sich simple Vereinfachungen, Substitution und Differenzieren umsetzen. Allerdings besteht derzeit seitens der Informatikdidaktik kein großes Interesse an einer solchen fächerverbindenden Zusammenarbeit, und außerdem erreicht Infomatikunterricht nur einen Bruchteil der Schüler und Schülerinnen.

Man kann aber Leistung und Grenzen von CAS auch ohne Programmieren zum Unterrichtsgegenstand machen. Zum Einen kann auf mathematischer Ebene geklärt werden, welche Problemklassen algorithmisch berechenbar sind (und in CAS typischerweise implementiert sind), so dass man z. B. aus einer negativen Antwort des CAS schließen kann, dass keine Lösung existiert. Dies sollte meines Erachtens zumindest das Wissen umfassen, dass Polynome über den rationalen Zahlen, wenn sie faktorisierbar sind, auch zerlegt werden, dass „leere Menge“ als Lösung eines polynomiellen Gleichungssysteme tatsächlich aussagt, dass es keine Lösung gibt, und dass bei transzendenten Termen und Gleichungen nur sehr kleine Teilklassen algorithmisch beherrscht sind. Dies sind auch wichtige Erkenntnisse für die Lehrerausbildung. Eine Lehrkraft sollte wissen, dass schon die schlichte Aufgabe „Vereinfache einen vorgelegten Term, der die Sinusfunktion enthalten kann, zu 0, wenn möglich“ algorithmisch nicht entscheidbar ist, denn daraus folgt einerseits eine Relativierung der Bedeutung der beliebten „Vereinfache“-Aufgaben, andererseits versteht man so, warum man sich bei komplexen symbolischen Rechnungen oft nicht sicher sein kann, ob das Ergebnis gilt, denn im Laufe der Rechnung könnte ja (trotz Vereinfachung) unbemerkt durch 0 dividiert worden sein.

Zum Anderen kann man die Arbeitsweise eines CAS auch mit Papier, Bleistift und Radiergummi nachspielen. Dazu müssen zunächst CAS-übliche Termdarstellungen behandelt werden, z. B.

```
x+y+5
```

als

```
(+ x y 5)
```

und

```
x^2+3x-y/z
```

als

```
(+ (^ x 2) (* 3 x)
   (* -1 (* y (^ z -1))))
```

Diese aus Lisp entlehnte Schreibweise macht das Assoziativitätsgesetz überflüssig, erlaubt ein Sortieren der Terme, und außerdem werden − und / als Operatoren unnötig! An der ersten Stelle jeder Klammer erkennt man sofort, um welche Art Operator es sich handelt, ohne auf Vorrangregeln achten zu müssen. Damit dürfte plausibel sein, dass diese Termdarstellung eine gute Grundlage bietet, um das mechanische Abarbeiten von algebraischen Algorithmen zu beschreiben. Die CAS-Regeln kann man explizit aufschreiben, z. B.:

```
(expand (* A (+ B1 B2))) =>
  (+ (* A B1) (* A B2))

(diff (* A B) X) =>
  (+ (* A (diff B X))
     (* (diff A X) B))
```

und auf Papier ausführen. Dies kann ein Gefühl geben für die Arbeitsweise eines CAS und wesentliche Teile der im dritten Abschnitt beschriebenen Modellvorstellung hervorbringen.

Reflektionen zum aktuellen Stand der CAS-Nutzung

Die obigen Überlegungen zeigen, dass CAS sinnvollerweise nicht nur zum Unterrichtsmittel sondern auch zum Unterrichtsgegenstand gemacht werden sollten, wie dies auch in [4] nahe gelegt wird. Dieser Forderung stehen zwei Argumente entgegen:

Ein Einwand lautet, dass die CAS in ihrem Verhalten immer näher an intuitive Vorstellungen herankommen. Je besser beispielsweise bei Substitutionen oder beim Pattern Matching die Assoziativität von Operatoren umgesetzt wird, um so weniger braucht man über Termdarstellungen wissen. Ich hege allerdings Zweifel, ob diese Sicht korrekt ist: Wenn man beispielsweise mit einem wenig technisch erscheinenden CAS einen Teilterm mit der Maus auswählt, stellt man fest, dass man bestimmte Teile auswählen kann, andere dagegen nicht und darin zeigen sich eben auch an der Oberfläche die internen Strukturen.

Ein anderer Einwand lautet, dass Mathematik gelehrt werden solle, nicht ihre technische Umsetzung. Auch hier habe ich Zweifel, ob das stichhaltig ist, denn die Erfahrung, dass und wie Mathematik maschinisierbar ist, kann durchaus den Anspruch erheben, allgemeinbildend zu sein.

Vor allem aber ist zu befürchten, dass durch die Verkürzung der Schulzeit und die Reduktion auf Kernlehrpläne die Bedeutung von CAS für die Schule zurückgehen wird. Denn CAS lohnt sich nur, wenn mit substantiellen und interessanten algebraischen Objekten gearbeitet wird. Ein schönes Beispiel schon für die Sekundarstufe I wurde von Paul Drijvers [1] gegeben: die Linsengleichung. Diese verschwindet aber gerade aus der Schule.

Die zukünftige Bedeutung von CAS in der Schule und die Art der Behandlung liegen heute ebenso im Ungewissen wie vor 10 oder 20 Jahren. Es gibt hier immer noch ein riesiges Betätigungsfeld für die Didaktik.

Literatur

[1] Drijvers, P.: *Die variable Unbekannte. Facetten des Variablenbegriffs mit Computeralgebra erkunden.* In: Mathematik lehren, Heft 136 (2006).

[2] Gentner, D., Stevens, A.: *Mental Models.* Lawrence Erlbaum 1980.

[3] Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L.: *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.* Springer 2005.

[4] Hischer, H.: *Mathematikunterricht und Neue Medien – Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht.* Franzbecker 2002.